impa instituto nacional de matemática pura e aplicada

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação

GOVERNO FEDERAL BRASIL PÁTRIA EDUCADORA

PAPMEM Julho / 2015

Soluções - Pitágoras e os Irracionais

Prof. Ledo Vaccaro Machado

1)

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{a}<\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a} \Rightarrow \frac{d}{b}<\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{d}{b}+1<\frac{c}{a}+1 \Rightarrow \frac{d}{b}+\frac{b}{b}<\frac{c}{a}+\frac{a}{a} \Rightarrow \frac{b+d}{b}<\frac{a+c}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{b+d}{b}\cdot\frac{a}{b+d}<\frac{a+c}{a}\cdot\frac{a}{b+d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \qquad (1)$$

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}<\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}+1<\frac{b}{d}+1 \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{c}{c}<\frac{b}{d}+\frac{d}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{c}<\frac{b+d}{d} \Rightarrow$$

$$\frac{a+c}{c}\cdot\frac{c}{b+d}<\frac{b+d}{d}\cdot\frac{c}{b+d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d} \qquad (2)$$

De (1) e (2), temos: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ C.Q.D.

2)

Lema 1:

A soma de um número irracional com um número racional é um número irracional.

Sejam *x* um irracional e *a* um racional. Se *x* + *a* for um número racional *b* teremos que *x* = *b* – *a* = *b* + (– *a*), mas isso é um absurdo dado que a soma de dois racionais é um racional. Logo, *x* + *a* é irracional.

Lema 2:

A divisão de um irracional por um racional diferente de zero é um número irracional.

Sejam *x* um irracional e *c* um racional diferente de zero. Se *x*/*c* é um racional *d*, então *x* = *c*·*d*, o que é um absurdo, pois o produto de dois racionais é racional. Logo, *x*/*c* é irracional.

Demonstração:

Se x e z são números irracionais tais que $x < z$, então $x < \frac{x+z}{2} < z$. Se $\frac{x+z}{2}$ for irracional, tomamos $\frac{x+z}{2} = y$ e nada mais há a demonstrar. Se $\frac{x+z}{2}$ for racional, tomemos $y = \frac{x+\frac{x+z}{2}}{2}$. Dessa forma, $x < y < \frac{x+z}{2} < z$. Pelo lema 1, $x + \frac{x+z}{2}$ é irracional, por ser a soma de um irracional com um racional. Pelo lema 2, $\frac{x+\frac{x+z}{2}}{2}$ é um irracional, por ser a divisão de um irracional por um racional diferente de zero. Portanto, y é irracional e $x < y < z$, C.Q.D.

3)

Escolha uma unidade de comprimento qualquer, u. Construa um triângulo retângulo de catetos 1 u e 1 u. A hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{2}$ u. Construa um triângulo retângulo de catetos $\sqrt{2}$ u e 1u. A hipotenusa desse novo triângulo mede $\sqrt{3}$ u. Seja *AB* o segmento que queremos dividir. Desenhe uma semirreta com origem em *A* que não esteja sobre a reta suporte de *AB*. Marque sobre a semirreta, partindo de *A,* dois segmentos consecutivos de comprimentos 1 u e $\sqrt{3}$ u, transferindo os comprimentos do cateto unitário e da hipotenusa do último triângulo retângulo encontrado. Sejam *A*, *C* e *D* as extremidades dos dois segmentos marcados sobre a semirreta. Una *D* com *B* e trace uma paralela ao segmento *BD* passando por *C*. Essa paralela corta o segmento *AB* em um ponto. Esse ponto divide o segmento AB em partes proporcionais a 1 e $\sqrt{3}$.