Recorrência

PROF.LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO

1. De quantas maneiras podemos cobrir um retângulo $2 \times n$ com peças 1×2 ou 2×2?

2. Encontre o número de permutações $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ de $(1, 2, \dots, n)$ tais que $|p_k - k| \leq 1$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

3. Seja $r(n)$ o número de maneiras de se escrever um inteiro positivo n na forma $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$, onde $m_1, m_2, \dots, m_k$ e k são inteiros positivos arbitrários. Mostre que $r(n) = 1 + r(1) + r(2) + \cdots + r(n-1)$ para $n \geq 2$. Deduza que $r(n) = 2r(n-1)$ para $n \geq 2$. Conclua que $r(n) = 2^{n-1}$ para todo inteiro positivo n. Você consegue apresentar uma demonstração direta deste fato?

Soluções

1. Seja a_n o número procurado. Temos $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$ (um quadrado, dois dominós na horizontal ou dois dominós na vertical). Se $n > 2$, considere as três possibilidades para cobrir o canto superior esquerdo: um dominó na vertical, um dominó na horizontal ou um quadrado. A primeira nos deixa com um retângulo $2 \times n - 1$, que pode ser coberto de a_{n-1} maneiras. A segunda possibilidade nos obriga a colocar outro dominó horizontal para cobrir o canto inferior esquerdo, deixando-nos com um retângulo $2 \times n - 2$, que pode ser coberto de a_{n-2} maneiras, o mesmo acontecendo com a terceira possibilidade. Assim,

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

A equação característica, $x^2 - x - 2 = 0$, tem raízes 2 e -1. Logo $a_n = \alpha @^n + \beta(-1)^n$. Observando que $a_0 = 1$, resolvemos o sistema $\alpha + \beta = 1$, $2\alpha - \beta = 1$ e encontramos $\alpha = \frac{2}{3}$ e $\beta = \frac{1}{3}$. Logo a resposta é

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

2. Seja $P(n)$ a resposta ao problema. Temos $P(1) = 1$ e $P(2) = 2$, pois todas as permutações de 1 ou 2 elementos cumprem a condição do enunciado. Para $n > 2$, Há duas possibilidades para p_n, $p_n = n$ ou $p_n = n - 1$. No primeiro caso, o número de maneiras de completar a permutação é $P(n-1)$. No segundo caso, seja k tal que $p_k = n$. Devemos ter $|n-k| \leq 1$ e $k \neq n$, logo $k = n-1$, ou seja $p_{n-1} = n$. Isso significa que os demais $n-2$ valores ocuparão as primeiras $n - 2$ posições, logo o número de maneiras de completar a permutação neste caso é $P(n-2)$. Concluímos que

$$P(n) = P(n-1) + P(n-2) \quad \text{(recorrência de Fibonacci)}.$$

Como $P(1) = F_2$ e $P(2) = F_3$, concluímos que

$$P(n) = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

3. Se $m_1 = n$, há uma única maneira. Para cada possível valor de $m_1 < n$, o número de maneiras de escolher os números $m_2, \dots, m_k$ é igual a $r(n - m_1)$, pois $n - m_1 = m_2 + \cdots + m_k$. Como os possíveis valores de $m_1 < n$ são $1, 2, \dots, n-1$, temos $r(n) = 1 + r(1) + r(2) + \cdots + r(n-1)$. Assim, para $n \geq 3$, temos $r(n-1) = 1 + r(1) + r(2) + \cdots + r(n-2)$ e subtraindo estas duas últimas equações obtemos $r(n) - r(n-1) = r(n-1) \iff r(n) = 2r(n-1)$. Como $r(1) = 1$ e $r(2) = 2$, esta igualdade é válida para todo $n \geq 2$. A seqüência $r(n)$ é, portanto, uma P.G. de razão 2 cujo termo geral é dado por $r(n) = 2^{n-1} r(1)$, ou seja, $r(n) = 2^{n-1}$.

   Uma demonstração direta pode ser a seguinte: Considere uma fila com n números "1". Em cada um dos $n - 1$ espaços entre esses números "1" temos a opção de acrescentar ou não um sinal "+". A sequência final formada pode ser interpretada como uma sequência de inteiros positivos de soma n. Reciprocamente, cada possível solução pode ser interpretada como uma tal sequências de números "1" e sinais "+".