impa
instituto nacional de
matemática
pura e aplicada

Ministério da
Ciência, Tecnologia
e Inovação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PÁTRIA EDUCADORA

PAPMEM JULHO / 2015

Problemas Intrigantes

PROF. LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO

Soluções

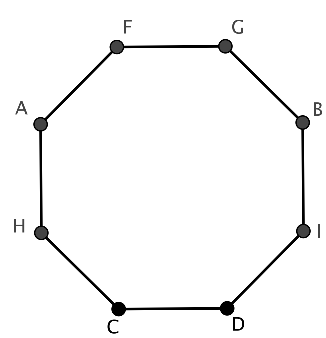
1. Cada vez que quebramos o chocolate transformamos um pedaço em dois, logo aumentamos em uma unidade o total de pedaços. Como começamos com um pedaço e queremos terminar com 20 (pois há $5 \times 4 = 20$ quadradinhos no total), devemos quebrar o chocolate exatamente 19 vezes.

2. Há n possíveis valores para a quantidade de amigos de cada pessoa: $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Para que duas pessoas nunca tivessem o mesmo número de amigos, para cada um desses valores deveria corresponder uma pessoa com exatamente esse número de amigos. Mas se uma pessoa tem 0 amigos, não pode haver outra com $n-1$ amigos. Assim, deve haver duas pessoas com o mesmo número de amigos.

3. Nomeando as casas do tabuleiro como na figura, observamos que a casa E nunca pode ser atingida, e partindo de cada uma das outras casas há sempre dois destinos possíveis após 1 movimento do cavalo. Por exemplo, partindo de A, um cavalo pode ir apenas para F ou H.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Então podemos reformular o problema associando cada casa a um ponto e conectando dois pontos quando o cavalo pode saltar entre as casas correspondentes em 1 movimento. Obtemos a seguinte figura.



Como dois cavalos nunca podem ocupar a mesma casa ao mesmo tempo, vemos que os cavalos manterão a ordem cíclica original, e podem ocupar quaiquer posições que respeitem essa condição. Logo é possível inverter a posição de brancos e pretos, mas não é possível que os cavalos de mesma cor ocupem cantos opostos.

4. Pensando de trás para frente, a criança que encontrar 1 bala sobre a mesa em sua vez de jogar, perde. Logo quem encontrar 2 balas vence, comendo 1. Encontrando 3 balas o único movimento possível é deixar 2 ao adversário, perdendo o jogo. Assim, encontrando de 4 a 6 balas é possível garantir a vitória deixando 3. Mas quem encontrar 7 será obrigado a deixar de 4 a 6, permitindo a vitória de seu adversário. De forma análoga deduzimos que quem encontrar 15 balas será obrigado a permitir a vitória do adversário. Logo a primeira criança pode garantir a vitória comendo 5 balas inicialmente, logo deixando 7, 3 e finalmente 1 bala.