

Soluções
Probabilidade e Valor Esperado
Prof. Paulo Cezar Carvalho

1.

Seja q_x é a probabilidade de um indivíduo na faixa etária $[x, x + 1)$ morrer. Logo $p_x = 1 - q_x$ é a probabilidade de um indivíduo na faixa etária $[x, x + 1)$ fazer $x + 1$ anos. Se l_x representa o número de indivíduos que fizeram aniversário de x anos, então $l_{x+1} = l_x \times p_x$. No problema temos:

$$l_{21} = 1000000, q_{21} = q_{22} = 0,10\% \text{ e, portanto, } p_{21} = p_{22} = 99,9\%.$$

$$\text{Logo, } l_{23} = l_{21} \times p_{21} \times p_{22} = 1000000 \times 99,9\% \times 99,9\% = 998001 \text{ pessoas.}$$

2.

a) Há 36 resultados possíveis para os dois lançamentos. Os casos em que o prêmio é de 3 mil reais (ou seja, em que o maior número observado é 3) são (1, 3), (3,1), (2, 3), (3, 2) e (3, 3). Logo, a probabilidade de que o participante ganhe um prêmio de 3 mil reais é $5/36$.

b) A tabela abaixo dá a probabilidade de cada prêmio

| Prêmio | Probabilidade |
|--------|---------------|
| 1 | $1/36$ |
| 2 | $3/36$ |
| 3 | $5/36$ |
| 4 | $7/36$ |
| 5 | $9/36$ |
| 6 | $11/36$ |

O valor esperado do prêmio é, em milhares de reais, igual a $1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}$. Portanto, é de aproximadamente 4472 reais.

3.

a) A probabilidade de a primeira bola ser branca é $3/5$ e de ser preta é $2/5$. Logo, o lucro esperado retirando uma bola é igual a $100 \cdot \frac{2}{5} - 60 \cdot \frac{3}{5} = 4$ reais.

b) Os casos possíveis, com as respectivas probabilidades, ao se retirar duas bolas são dados abaixo:

| Bolas retiradas | Probabilidade | Prêmio |
|-----------------|----------------|--------|
| Branca, branca | $\frac{6}{20}$ | -120 |
| Branca, preta | $\frac{6}{20}$ | 40 |
| Preta, branca | $\frac{6}{20}$ | 40 |
| Preta, preta | $\frac{2}{20}$ | 200 |

O lucro esperado é $a -120 \cdot \frac{6}{20} + 40 \cdot \frac{6}{20} + 40 \cdot \frac{6}{20} + 200 \cdot \frac{2}{20} = 8$ reais.

Alternativamente, cada bola retirada tem a mesma probabilidade $\frac{2}{5}$ de ser branca. Portanto, em cada bola, o lucro esperado é 4 e o lucro total é $4 + 4 = 8$ reais.

c) Os casos possíveis, com as respectivas probabilidades, são dados abaixo:

| Bolas retiradas | Probabilidade | Prêmio |
|-----------------|----------------|--------|
| Preta | $\frac{2}{5}$ | 100 |
| Branca, preta | $\frac{3}{10}$ | 40 |
| Branca, branca | $\frac{3}{10}$ | -120 |

O lucro esperado é $100 \cdot \frac{2}{5} + 40 \cdot \frac{3}{10} - 120 \cdot \frac{3}{10} = 16$ reais.

4.

a) A probabilidade de que qualquer dos participantes tire seu próprio número é $\frac{1}{10}$.

b) Definamos $X_i = 1$, se o i -ésimo participante tira seu próprio número e $X_i = 0$, caso contrário. O valor esperado desejado é o da soma $X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$. O valor esperado de cada X_i é $\frac{1}{10} \times 1 + \frac{9}{10} \times 0 = \frac{1}{10}$. Logo, o valor esperado da soma é $10 \times \frac{1}{10} = 1$.