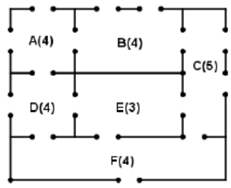
Problemas em grafos – Prof. Paulo Cezar

Soluções

1.

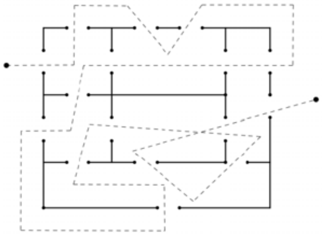
QUESTÃO 18
ALTERNATIVA B

Na figura marcamos, ao lado das letras que identificam as salas, o número de portas de cada uma.

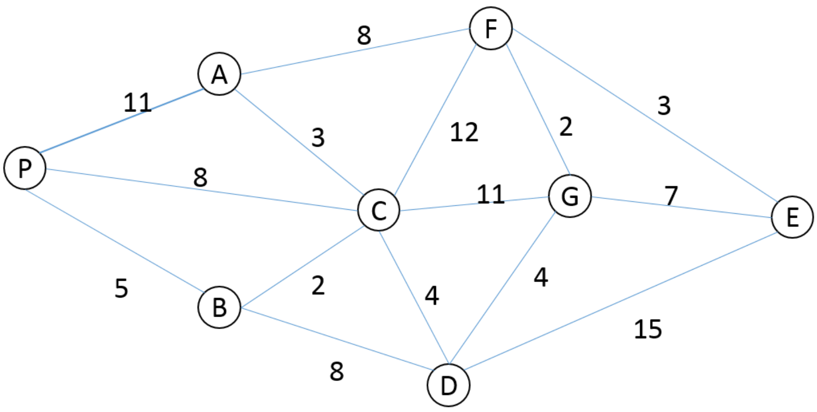


Vamos supor que a porta pela qual o Joãozinho passou duas vezes pertence a uma sala com 4 portas. Então ele passou uma única vez pelas 3 portas restantes, ou seja, ele passou 5 vezes pelas portas desta sala. Logo ele *entrou, saiu, entrou, saiu* e *entrou* na sala, ou seja, ficou dentro dela. Esta conclusão é contrária ao enunciado, que diz que ele foi embora. Logo o Joãozinho passou uma única vez por todas as portas das salas com 4 portas. Assim, a porta pela qual ele passou duas vezes é aquela que não pertence a nenhuma sala com 4 portas, ou seja, é a porta que liga as salas C e E.

Coloca-se, é claro, a questão da existência de um trajeto que satisfaça as condições do enunciado. Para isto, providenciamos a figura ao lado; nela, as bolinhas marcam o início e o término do trajeto.



2. O grafo representando as conexões é



Aplicando o algoritmo de Dijkstra, obtemos as seguintes distâncias, na ordem em que são obtidas:
B: 5
C: 7 (via B)
A: 10 (via B, C)
D: 11 (via B, C)
G: 15 (via B, C, D)
F: 17 (via B, C, D, G)
E: 20 (via B, C, D, G, F)

3. O número máximo de arestas ocorre quando o grafo é completo (ou seja, cada par de nós é conectado por uma aresta). Logo, um grafo em 10 nós tem no máximo $C_{10}^2 = 45$ arestas.
Um grafo não conexo com número máximo de arestas terá necessariamente duas componentes conexas, com m e 10 – m nós. Para que o número de arestas seja máximo, cada uma das componentes deverá ser um subgrafo completo, com um total de $C_m^2 + C_{10-m}^2 = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(10-m)(9-m)}{2} = m^2 - 10m + 45$ arestas. Para que este número seja máximo, deve-se ter m= 1 ou m =9. Nestes casos, o grafo possui 36 arestas.