O valor esperado de uma quantidade aleatória

Paulo Cezar Pinto Carvalho
IMPA e *EMAp/FGV*

Um conceito simples e útil, mas que não é normalmente explorado no Ensino Fundamental no Brasil é o de valor esperado de uma quantidade aleatória. Comecemos com um exemplo.

Exemplo 1. *Em um famoso jogo popular, o acertador deve apontar 1 dentre 25 resultados possíveis para um sorteio. Se acertar, ele recebe 18 vezes o valor apostado. Qual é o lucro (ou prejuízo) médio diário que deve ser esperado por alguém que aposte diariamente 1 real neste jogo por um período longo?*

A primeira observação a fazer é que não é possível obter um valor exato para o lucro médio do apostador: ele vai depender de sua "sorte", ou seja, do experimento aleatório que consiste nos sucessivos sorteios. No entanto, é possível ter uma ideia bastante aproximada do resultado alcançado pelo apostador, como veremos a seguir.

Em cada realização do jogo, há duas possibilidades para o apostador: se ele acerta o número sorteado, o que ocorre com probabilidade 1/25, ele tem um lucro de 18 – 1 = 17 reais; no caso contrário, que ocorre com probabilidade 24/25, ele tem um prejuízo de 1 real. Podemos resumir estes fatos na tabela abaixo:

Lucro (L)	Probabilidade
17	1/25
−1	24/25

Mas o que significa ter probabilidade 1/25 de ter um lucro de 17 reais? A interpretação de probabilidade mais útil para as aplicações (a chamada interpretação "frequentista") é a de que, se o sorteio for realizado muitas vezes, a frequência de resultados em que esse lucro é observado é aproximadamente igual a 1/25 das realizações.

Assim, se o sorteio é feito *n* vezes, onde *n* é grande, o apostador lucra 17 reais aproximadamente $\frac{n}{25}$ vezes e tem um prejuízo de 1 real aproximadamente $\frac{24n}{25}$ vezes. Portanto, o lucro total é aproximadamente $17.\frac{n}{25} - 1.\frac{24n}{25} = -\frac{7n}{25}$ e o lucro médio diário, obtido dividindo o lucro total pelo número *n* de dias de aposta, é $-\frac{7}{25} = -0{,}28$.

Concluímos, portanto, que o apostador contumaz terá um prejuízo médio diário aproximado de R$ 0,28. Mas será que este resultado reflete a realidade? Um modo de nos convencermos (e a nossos alunos) da utilidade do resultado encontrado (e de suas limitações) é simularmos o processo repetido de aposta. Isto pode ser feito, em pequena escala, com materiais simples, como uma caixa da qual sortamos papéis numerados de 1 a 25. Para simulação em grande escala, é muito melhor recorremos a um computador, como mostra a planilha que pode ser obtida em https://sites.google.com/site/papmem2015/sorteio.xlsx. Ela mostra o resultado de simular o processo de aposta com 10 apostadores e mostra o ganho médio de cada um após 10, 100 e 10000 dias de apostas (se você obtiver esta planilha e os resultados obtidos forem diferentes dos mostrados abaixo, não estranhe: cada vez que a planilha é aberta, ela repete o experimento aleatório, fornecendo resultados diferentes a cada vez).

	Lucro médio após ... realizações				
Apostador	10	100	1000	10000	100000
1	-1	-0,46	-0,30204	-0,253	-0,27532
2	-1	-0,46	-0,22857	-0,2476	-0,26398
3	-1	-0,28	-0,22857	-0,3556	-0,29026
4	-1	0,08	-0,28367	-0,3106	-0,28522
5	-1	-0,46	-0,37551	-0,2854	-0,2809
6	-1	-0,64	-0,17347	-0,316	-0,27874
7	-1	-0,28	-0,33878	-0,2386	-0,28396
8	-1	-0,28	-0,37551	-0,2458	-0,27712
9	0,8	-0,1	-0,37551	-0,3574	-0,28
10	-1	0,08	-0,1551	-0,244	-0,29404

Após 10 realizações, há ainda muita flutuação nos resultados. Nas sequências que observamos, um dos apostadores está no lucro após 10 apostas (ele ganhou uma vez e perdeu nas outras nove). Com 100 apostas, ainda há dois apostadores que estão tendo um pequeno lucro (ambos ganharam em 6 das 100 ocasiões), mas com 1000 apostas, todos já estão tendo prejuízo. Com 10000 apostas, o prejuízo médio dos 10 apostadores está entre R$ 0,2386 e R$ 0,3574 e, com 100000 apostas, entre R$ 0,26398 e R$ 0,29404. Assim, à medida que aumenta o número de dias observados, o lucro médio observado varia, mas oscila cada vez menos em torno do valor esperado de R$ 0,28 (este comportamento pode ser descrito com precisão em teoremas conhecidos como "Leis dos Grandes Números").

Enfim, a análise que fizemos anteriormente, que nos levou a encontrar o valor esperado de R$ 0,28 para o lucro médio, é útil para prever o comportamento a longo prazo do lucro médio do apostador (embora não represente o valor exato a ser observado em uma dada sequência de apostas). Isto motiva a definição de valor esperado de uma quantidade numérica aleatória (ou, mais tecnicamente, de uma *variável aleatória*).

Definição: Suponhamos que, em um experimento aleatório, uma quantidade observada X possa assumir os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com probabilidades respectivamente iguais a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (com $p_1, p_2, \ldots, p_n \geq 0$ e $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$). O *valor esperado* ou *valor médio* dessa quantidade (ou variável) aleatória é

$$E\,X = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

Observe que isto corresponde exatamente ao que fizemos acima para calcular o lucro médio diário esperado após um grande número de realizações: E (Lucro) = $\frac{1}{25}.17 + \frac{24}{25}.(-1) = -\frac{7}{25} = -0{,}28.$

Note, também, que o valor esperado de uma quantidade aleatória é a média ponderada dos valores que ela pode assumir, com pesos respectivamente iguais às respectivas probabilidades (se você está sentindo falta da divisão pela soma dos pesos, lembre-se que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$).

Exemplo 2. *Uma moeda honesta é lançada três vezes. Considere as seguintes variáveis aleatórias observadas neste experimento:*

X = número de caras

Y = número de sequências de resultados iguais consecutivos

Calcular os valores esperados de X, Y e X+Y .

A tabela abaixo dá os resultados possíveis para os resultados do experimento aleatório, suas respectivas probabilidades e os valores de *X*, *Y* e *X+Y* em cada caso.

Resultado	Probabilidade	*X*	*Y*	*X+Y*
cara, cara, cara	1/8	3	1	3+1=4
cara, cara, coroa	1/8	2	2	2+2=4
cara, coroa, cara	1/8	2	3	2+3=5
coroa, cara, cara	1/8	2	2	2+2=4
cara, coroa, coroa	1/8	1	2	1+2=3
coroa, cara, coroa	1/8	1	3	1+3=4
coroa, coroa, cara	1/8	1	2	1+2=3
coroa, coroa, coroa	1/8	0	1	0+1=1

A partir daí, podemos extrair, para cada variável aleatória, os valores que ela assume e as respectivas probabilidades. Por exemplo, para *X*, temos:

X	Probabilidade
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

(Observe que, por exemplo, *X* =1 ocorre em três resultados, com uma probabilidade total de 3/8).

Logo, o valor esperado de *X* é

$E\,X = \frac{1}{8}.0 + \frac{3}{8}.1 + \frac{3}{8}.2 + \frac{1}{8}.3 = \frac{12}{8} = 1{,}5.$

Na verdade, não é necessário obter a tabela das probabilidades de *X* para calcular seu valor esperado. O cálculo pode ser feito diretamente a partir da tabela de resultados, multiplicando a probabilidade de cada resultado pelo valor de *X* em cada caso.

$E\,X = \frac{1}{8}.3 + \frac{1}{8}.2 + \frac{1}{8}.2 + \frac{1}{8}.2 + \frac{1}{8}.1 + \frac{1}{8}.1 + \frac{1}{8}.1 + \frac{1}{8}.0 = \frac{12}{8} = 1{,}5.$

Observe que o cálculo anterior corresponde a simplesmente agrupar os valores iguais de *X* em um único termo, por exemplo, o termo $\frac{3}{8}.1$ é a soma dos três termos $\frac{1}{8}.1$ correspondentes aos resultados (cara, cara, coroa), (cara, coroa, cara) e (coroa, cara, cara).

Fazendo o mesmo com cada uma das outras variáveis, obtemos:

$E\,Y = \frac{1}{8}.1 + \frac{1}{8}.2 + \frac{1}{8}.3 + \frac{1}{8}.2 + \frac{1}{8}.2 + \frac{1}{8}.3 + \frac{1}{8}.2 + \frac{1}{8}.1 = \frac{16}{8} = 2.$

$E\,(X+Y) = \frac{1}{8}.(3+1) + \frac{1}{8}.(2+2) + \frac{1}{8}.(2+3) + \frac{1}{8}.(2+2) + \frac{1}{8}.(1+2) + \frac{1}{8}.(1+3) + \frac{1}{8}.(1+2) + \frac{1}{8}.(0+1) =$

$$\left(\frac{1}{8}.3+\frac{1}{8}.2+\frac{1}{8}.2+\frac{1}{8}.2+\frac{1}{8}.1+\frac{1}{8}.1+\frac{1}{8}.1+\frac{1}{8}.0\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8}.1+\frac{1}{8}.2+\frac{1}{8}.3+\frac{1}{8}.2+\frac{1}{8}.2+\frac{1}{8}.3+\frac{1}{8}.2+\frac{1}{8}.1\right)=$$

$$=\frac{12}{8}+\frac{16}{8}=3{,}5$$

(Organizamos as contas acima de modo a deixar claro que o valor esperado de $X+Y$ é sempre igual à soma dos valores esperados de X e Y, já que a expressão que fornece $E\,(X+Y)$ pode ser decomposta na soma das expressões de EX e EY.)

De modo mais geral, temos o seguinte teorema$\frac{1}{8}.1$

Linearidade do valor esperado: Se X e Y são variáveis aleatórias relativas ao mesmo experimento aleatório, temos $E(aX + bY) = aEX + bEY.$

Mas cuidado: não vale, em geral, a propriedade análoga para variáveis definidas por outras operações. Por exemplo, na mesma situação, temos

$E(X^2) = \frac{1}{8}.3^2+\frac{1}{8}.2^2+\frac{1}{8}.2^2+\frac{1}{8}.2^2+\frac{1}{8}.1^2+\frac{1}{8}.1^2+\frac{1}{8}.1^2+\frac{1}{8}.0^2=\frac{24}{8}=3,$

enquanto $(EX)^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

Exemplo 3: *Um dado honesto é lançado 10 vezes. Qual é o número esperado de lançamentos em que o resultado obtido é 6?*

É possível obter a tabela de probabilidades relativas à variável aleatória X, definida como o número de lançamentos em que o resultado é 6. Os valores que X pode assumir são 0, 1, 2, ..., 10 e podemos calcular, para cada k neste conjunto de valores, a probabilidade de que X seja igual a k. A probabilidade de que sejam registrados k resultados iguais a 6 consecutivos e, a seguir, $10 - k$ resultados diferentes de 6 é $\frac{\overbrace{1.1.\ldots.1}^{k}\overbrace{.5.5.\ \ 5}^{10-k}}{6^k}=\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$. Mas os k resultados iguais a 6 não precisam ocorrer todos juntos no início. Os locais em que eles ocorrem podem ser escolhidos de C_{10}^k modos. Logo, temos $p_k = P(X = k) = C_{10}^k\ \left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$, para k = 0, 1, 2, ..., 10. Daí, podemos calcular o valor esperado de X:

$$EX=\sum_{k=0}^{10}p_k k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\ \left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}.k$$

Se fizermos as contas (trabalhosas) expressas pelo somatório, vamos encontrar $EX = 10/6 = 5/3$.

Mas poderíamos chegar a esse resultado de forma bem mais rápida, usando a linearidade do valor esperado. Para k = 1, ..., 10, vamos chamar de X_k a variável aleatória que descreve se ocorreu ou não um resultado igual a 6 no k-ésimo lançamento. Isto é, vamos considerar que $X_k= 1$ se saiu 6 nesse lançamento e $X_k = 0$ caso contrário. O número total de lançamento em que saiu 6 é simplesmente a soma $X = X_1 + X_2 + ... + X_{10}$. Pela propriedade aditiva do valor esperado, $EX = E\,X_1 + EX_2 + ... + EX_{10}$. Mas, para cada k,

$EX_k = P(X_k = 0).\,0 + P(X_k = 1).\,1 = \frac{5}{6}.\,1 = \frac{5}{6}.$

Portanto, $EX = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \cdots + \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$

Terminamos com uma situação envolvendo variáveis aleatórias que podem assumir uma infinidade (mas contável, isto é, que podem ser postos em correspondência biunívoca com os números naturais) de valores . A definição de valor esperado continua a mesma: $EX = \sum p_k\, x_k$,, mas o somatório agora tem um número infinito de parcelas e pode ou não convergir para um número real.

Exemplo 4. *Um apostador faz seguidas apostas em um jogo em que ele tem probabilidade ½ de ganhar. Se ganhar, ele recebe o dobro do valor apostado. Ele adota a seguinte estratégia: começa apostando 1 real; se ganhar, se retira do jogo com um lucro de 1 real. Se perder, joga 2 reais; se ganhar, se retira do jogo com um lucro de 1 real (4 – 2 – 1). Se perder, joga 4 reais, e assim por diante, sempre dobrando a aposta em caso de derrota, assegurando que, quando finalmente ganhar, terá um lucro de 1 real.*

a) Qual é o valor esperado do número N de apostas até ganhar?
b) Qual é o valor esperado do investimento total X que terá que ser feito para ganhar?

As duas variáveis aleatórias N e X podem ambas assumir valores em um conjunto infinito. O valor de N pode ser qualquer número natural. Já X pode ser expressa em termos de N. Se forem N rodadas até ganhar, o investimento será $X = 1 + 2 + ... + 2^{N-1} = 2^N - 1$.

A tabela de probabilidades de N é dada por $P(N=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, para $k = 1, 2, ...$ De fato, para que haja k rodadas de apostas, o jogador deve ter perdido as $k - 1$ primeiras e ganhado a k-ésima. Como cada uma destas k ocorrências tem probabilidade ½ e elas são independentes entre si, a probabilidade de que a vitória ocorra na k-ésima aposta é $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Logo:

$$EN = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.2 + \frac{1}{8}.3 + \frac{1}{16}.4 + \ldots$$

Uma forma de calcular a soma infinita acima consiste em decompor cada parcela da forma $\left(\frac{1}{2}\right)^k k$ em k parcelas iguais a $\left(\frac{1}{2}\right)^k$, conforme abaixo:

$$\begin{array}{lllll} EN = & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{4}+ & \frac{1}{8}+ & \frac{1}{16}+ & \ldots \\ & & \frac{1}{4}+ & \frac{1}{8}+ & \frac{1}{16}+ & \ldots \\ & & & \frac{1}{8}+ & \frac{1}{16}+ & \ldots \end{array}$$

Em cada linha, temos a soma de uma progressão geométrica de razão ½. A soma da primeira linha é $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$; da segunda é $\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; da terceira, $\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$, e assim por diante, formando uma nova progressão geométrica de razão 1/2. Logo

$$EN = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2.$$

Portanto, em média são jogadas duas rodadas até que o apostador se retire do jogo com seu lucro de 1 real. Neste momento, poderíamos ser tentados a achar que, como o valor a ser investido X é igual a $2^N - 1$, onde N é o número de rodadas, o investimento esperado até a vitória é igual a $2^2 - 1 = 3$ reais. Na verdade, este é um exemplo que mostra, de modo radical, que, em geral, **não vale** $E(f(X)) = f(EX)$! O investimento X assume os valores 2^1-1, 2^2 -1, 2^3-1, ... com probabilidades respectivamente iguais a 1/2, 1/4, 1/8,.... Logo:

$$EX = \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{4}(4-1) + \frac{1}{8}(8-1) = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(1-\frac{1}{8}\right) + \cdots = +\infty$$

(Note que a soma das parcelas iguais a 1 cresce sem limite, enquanto as demais parcelas somam 1.)

Portanto, o investimento esperado de nosso jogador é infinito, o que torna a estratégia descrita acima extremamente arriscada! A análise das aparentes contradições que surgem ao estudar esta situação é conhecida como “Paradoxo de São Petersburgo” .