1 Parábolas

1.1 Introdução

Segundo o comentarista Eutócio, Menêcmo, disípulo de Eudóxo, foi o primeiro a estudar as seções cônicas com o intuito de resolver o problema da duplicação do cubo. Ao seu trabalho, seguiram os estudos de Aristeu e Euclides. Até esse ponto, as seções cônicas eram aquelas obtidas traçando-se um plano perpendicular a uma das geratrizes. Por isso, a Parábola era aquela obtida quando o ângulo entre as geratrizes era reto. Nesse caso, o cone era dito retângulo. Cones acutângulo e obtusângulo produziam, respectivamente, a elipse e a hipérbole.

Apolônio deu continuidade aos quatro livros de Euclides sobre as seções cônicas acrescentando outros quatro livros. Introduziu o conceito de cone duplo, que deu origem ao outro ramo da hipérbole e também foi responsável por obter todas as cônicas a partir de um mesmo cone duplo. Para Apolônio "*Parábola é a curva obtida quando cortamos um cone por um plano paralelo a uma de suas geratrizes*".

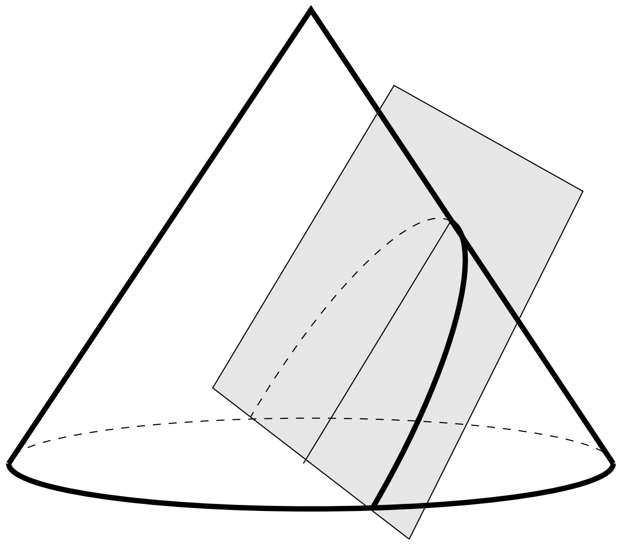

Figura 1.1: Parábola obtida a partir de um cone.

A curva assim obtida (Figura 1.1) é contínua e suave, ou seja, se escolhermos um ponto da curva e olharmos suficientemente perto desse ponto, pode-se encontrar um segmento de reta tal que não é possível fazer distinção entre a curva e esse segmento de reta. Essa característica será bastante utilizada para obtermos aproximações da parábola a partir de retas tangentes.

No ensino médio, o estudo das cônicas é basicamente feito usando o método analítico criado no século XVII por Descartes e Fermat. Por outro lado, um conhecimento das características da curva pelo método sintético nos permite mais liberdade na hora de reconhecer e utilizar a parábola nas modelagens e na resolução de problemas.

1.2 Definição analítica da Parábola

Em um plano, seja F um ponto e d uma reta que não passa por F. Uma parábola de foco F e diretriz d é o conjunto de todos os pontos P cuja distância até F é igual à distância até d. Em outras palavras, se P é um pondo da parábola de foco F e diretriz d, então vale a igualdade

$$PF = d(P, d)$$

Como consequência, a parábola divide o plano em duas regiões. Uma delas chamada interior à parábola onde os pontos P são tais que $PF < d(P,d)$ e outra chamada exterior à parábola, onde os pontos P são tais que $PF > d(P,d)$. Claramente, F é um ponto do interior da parábola e a diretriz é uma reta com todos os pontos no exterior da parábola.

Vale a pena introduzirmos os nomes de alguns elementos que farão parte do estudo da parábola (Figura1.2).

E1- A reta que é perpendicular à diretriz d, passando por F, é chamada de eixo da parábola.

E2- Há apenas um ponto V da parábola sobre o eixo. Esse ponto será chamado de vértice que é o ponto da parábola mais próximo da reta d.

E3- Uma reta que passa por um ponto P da parábola e deixa todos os demais pontos da parábola no mesmo semiplano que F é chamada reta tangente à parábola no ponto P

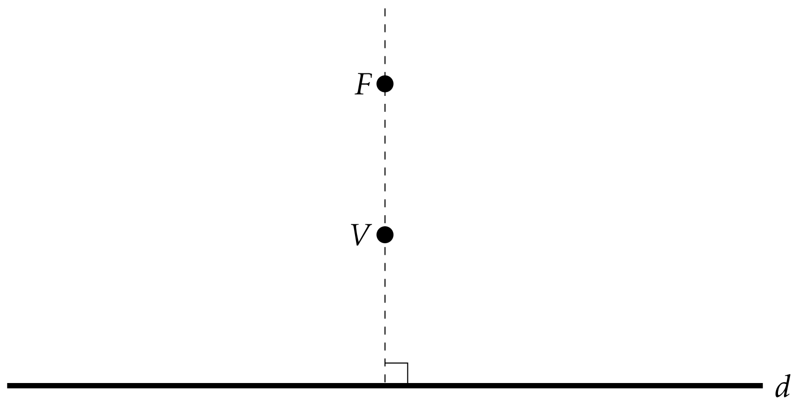

Figura 1.2: Elementos da parábola: Foco F, Diretriz d, Vértice V e eixo $FV \perp d$

Teorema 1. *Se o ponto P é um ponto da parábola, então P', simétrico de P em relação ao eixo, também é um ponto da parábola.*

Prova: Figura 1.3

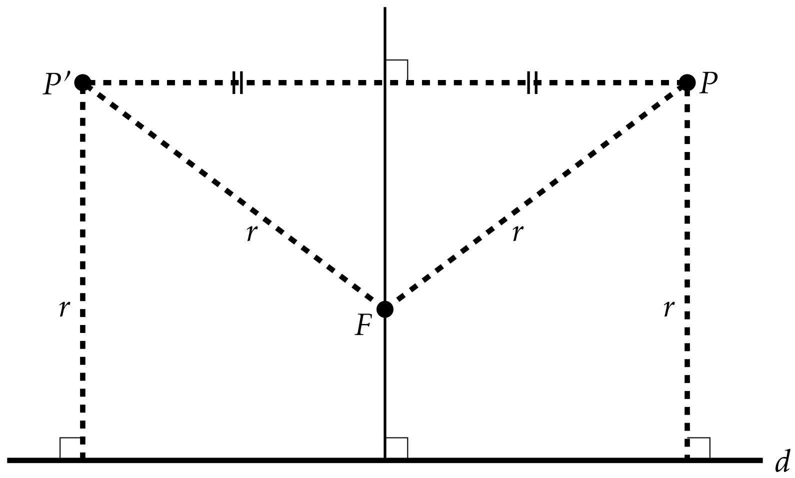

Figura 1.3: Prova do Teorema

Teorema 2. *Se P é um ponto da parábola de foco F e diretriz d e H é o pé da perpendicular a d baixada por P, então a mediatriz μ_{FH} do segmento FH é tangente à parábola.*

Prova:A mediatriz μ_{FH} é o conjunto dos pontos X tais que $XF = XH$ e, portanto, $P \in \mu_{FH}$. Também é conclui-se que P é o único ponto da mediatriz que pertence à parábola, pois se $X \in \mu_{FH}$, seja H_X o pé da perpendicular a d baixada por X. Nesse caso, o triângulo XH_XH é retângulo em H_X (Figura 1.4). Daí conclui-se que $XH = XF > XH_X$. Como $XH_X = d(X,d)$, X não pode ser um ponto da parábola. Além disso, todos os pontos de μ_{FH} são exteriores à parábola. Isso encerra a demonstração, pois, caso houvesse pontos da parábola em ambos os semiplanos determinados por μ_{FH}, haveria um pedaço dessa reta que seria interior à parábola, pela continuidade da curva.

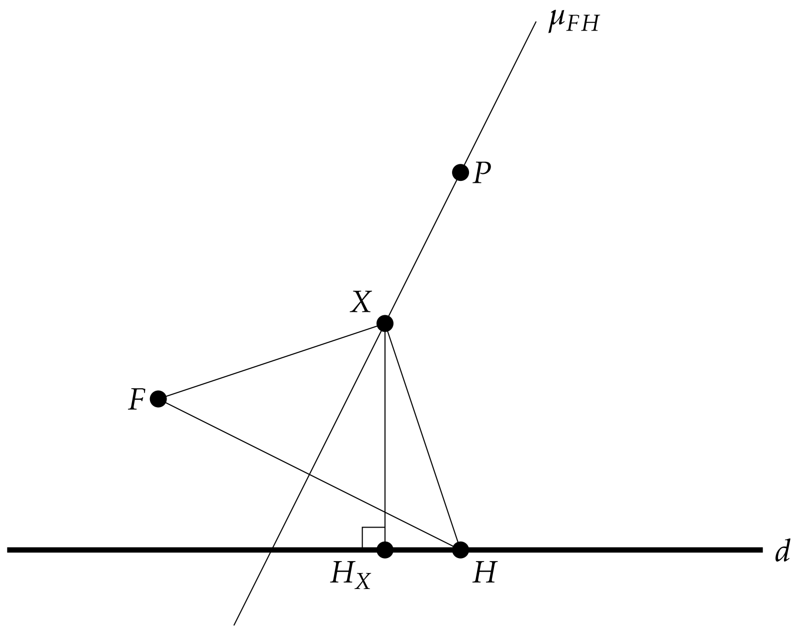

Figura 1.4: A mediatriz de FH possui um único ponto da parábola.

1.3 Obtendo uma parábola por dobraduras

O Teorema 2 nos fornece uma maneira de obter pontos de uma parábola, conhecidos o seu foco F e sua diretriz d. Para isso, basta tomar um ponto $H \in d$ e traçar a mediatriz de FH e a perpendicular à d passando por H. A interseção dessas retas nos fornecerá um ponto P pertencente à parábola. Com o auxílio de um software de geometria dinâmica, como o Geogebra, pode-se deslocar o ponto H escolhido sobre a reta fazendo com que o ponto P descreva uma parábola.

Vamos, por outro lado, nos aproveitar do fato de que a mediatriz descrita no procedimento é também uma tangente à parábola e que curvas suaves, como a parábola, podem ser aproximadas por tangentes. Apenas a como ilustração, a figura 1.5 é uma curva que não pode ser aproximada por tangentes.

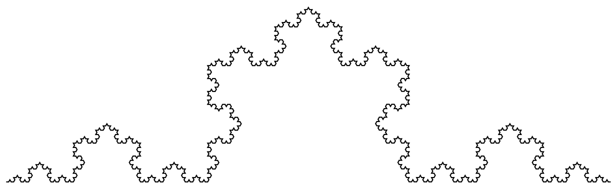

Figura 1.5: Curva que não pode ser aproximada por tangentes

A escolha pelo uso de dobraduras, não exclui a possibilidade do uso de softwares. Por outro lado, a atividade com dobraduras é um bom momento para convidar o aluno a participar mais ativamente da construção. Mostrar dificuldades e reconhecer propriedades além daquelas previstas pode ter uma influência positiva no seu aprendizado.

Antes de iniciar a construção da parábola, vale a pena fazer uma pequena exploração para mostrar que a dobra do papel gera uma mediatriz, que é um elemento fundamental para a construção que desejamos. Quando dobramos uma folha de papel, o vinco formado divide a folha em duas regiões que são boas representações de semiplanos. Além disso, cada ponto P coincidirá com um ponto P' da região oposta (Figura 1.6).

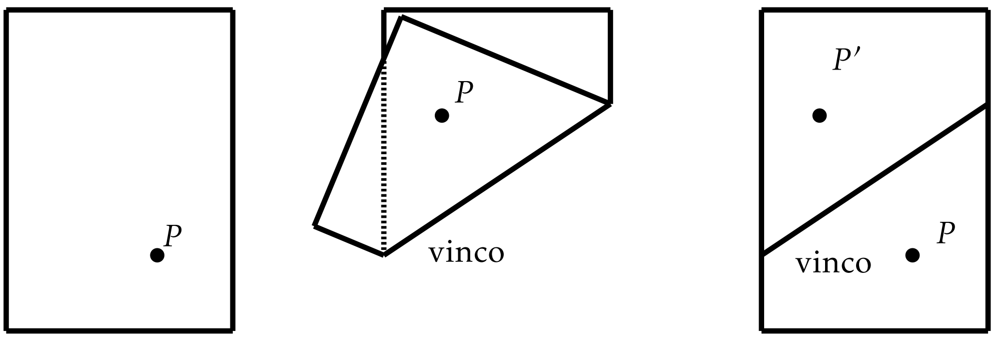

Figura 1.6: Antes durante e depois de uma dobradura

O uso de papel vegetal, que é mais transparente, permite fazer a constatação de que o vinco é a mediatriz do segmento PP' pela superposição dos pontos.

1.4 A Atividade

Para essa atividade, vamos usar uma folha de papel vegetal no formato A5 (que pode ser obtida cortando-se ao meio uma folha de papel A4), cujas dimensões são 14,8cm de altura por 21cm de comprimento.

Marque o ponto F distando 5cm da borda do papel que mede 21cm (a partir de agora, essa será chamada borda horizontal) e de modo que ele fique equidistante das bordas verticais. Alem disso, sobre a borda horizontal, tome uma quantidade considerável de pontos (na figura1.7 eu marquei 20 pontos, mas para atividades em sala de aula, normalmente eu marco 16 pontos tomando pontos médios sucessivos)

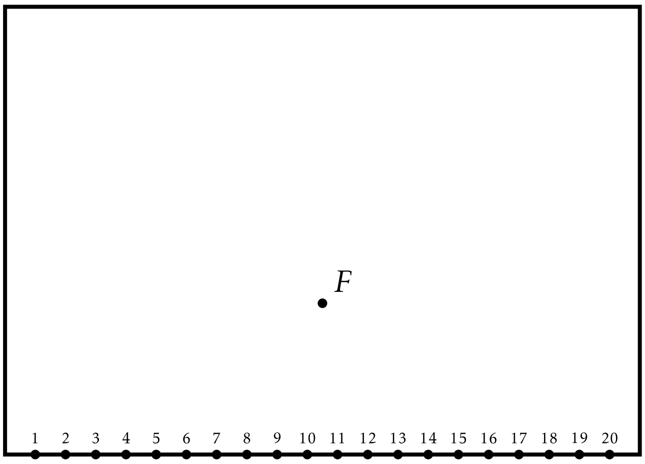

Figura 1.7: Folha de papel A5 com marcações

Agora, vamos começar a fazer dobraduras fazendo com que os pontos tomados na linha horizontal coincidam com o ponto F. A figura 1.8 mostra primeira dobra, isto é a dobra em que o ponto 1 coincide com F.

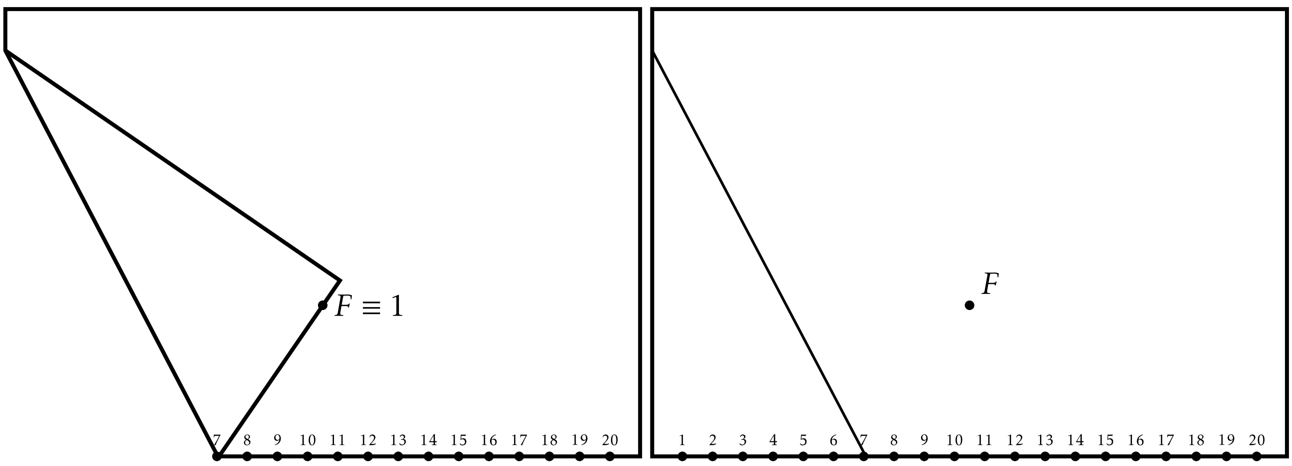

Figura 1.8: Dobradura do ponto 1. O vinco formado é uma tangente à parábola.

Seguindo todas as dobras, o resultado final é ilustrado na Figura 1.9

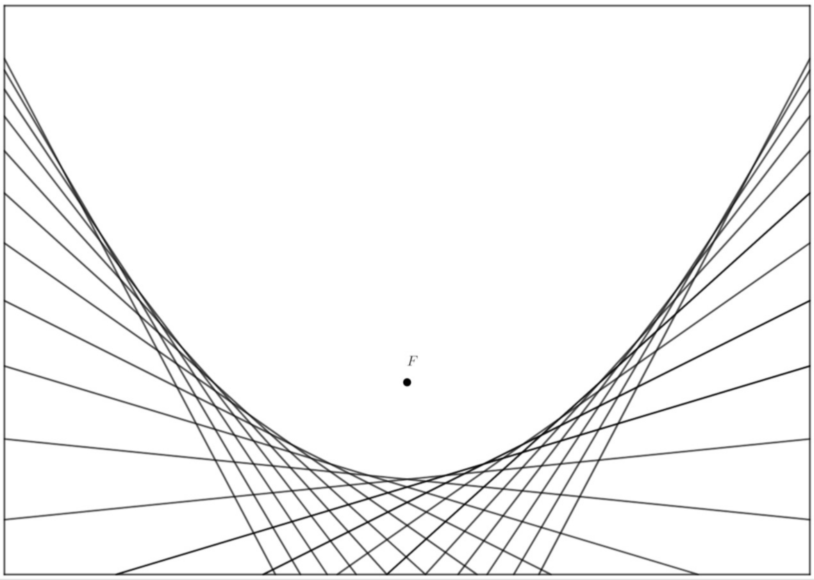

Figura 1.9: Resultado de todas as dobras.

1.5 Equação da curva obtida

Para encontrar a equação da curva obtida por meio da dobradura, devemos escolher dois eixos u na direção da diretriz e v na direção perpendicular à diretriz. A escolha mais natural para o eixo v é o próprio eixo da parábola e, tomaremos como unidade 1dm. O eixo u, para facilitar as contas, será tomado de modo que deixe toda a parábola num mesmo semiplano e, portanto, será a perpendicular à diretriz passando pelo Vértice. Desse modo, o Vértice da parábola coincidirá com a origem do plano, o foco será o ponto $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e a diretriz sera a reta $d : v = -\frac{1}{4}$ que, na figura 1.10, confunde-se com a borda da folha. Além disso, vamos marcar o ponto $U(0,1)$ para indicar que o segmento VU foi tomado como unidade de comprimento.

Nesse sistema, vamos aplicar a definição de parábola para encontrar sua equação:

$$
\begin{aligned}
d(P,d)^2 &= PF^2 \\
\left(v + \frac{1}{4}\right)^2 &= u^2 + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 \\
\cancel{v^2} + \frac{v}{2} + \cancel{\frac{1}{4}} &= u^2 + \cancel{v^2} - \frac{v}{2} + \cancel{\frac{1}{4}} \\
v &= u^2
\end{aligned}
$$

Portanto os pontos da parábola de foco F e diretriz d são da forma $P(u, u^2)$.

Aqui fica claro o quanto uma escolha conveniente de eixos e de unidade de comprimento pode deixar as contas bastante simples. De fato, Na nossa folha de papel, $VF = \frac{VU}{4}$ e esse comprimento é a ordenada do foco da parábola. Se escolhêssemos usar como unidade 2dm, teríamos $VU = \frac{1}{2}$ e, portanto $VF = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Temos ainda que supor que a unidade tenha sido escolhida por outra pessoa. Se a pessoa escolheu como unidade $a$dm, $a \neq 0$, teremos $VU = \frac{1}{a}$ e $VF = \frac{1}{4} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4a}$.

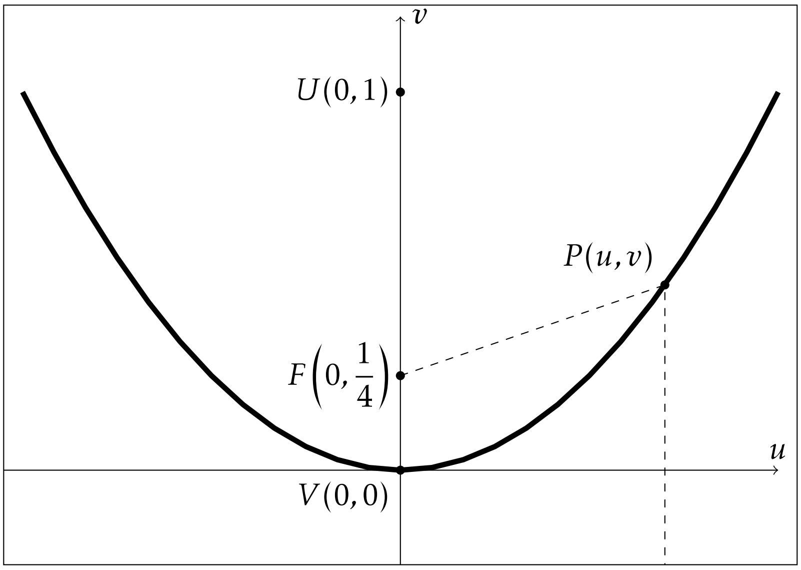

Figura 1.10: A parábola obtida com os eixos u e v traçados

Substituindo as novas coordenadas do foco na equação anterior, chegamos facilmente à relação $v = au^2$.

Se abrirmos mão da escolha dos eixos, assim como fizemos na escolha da unidade, teremos a situação ilustrada pela Figura 1.11.

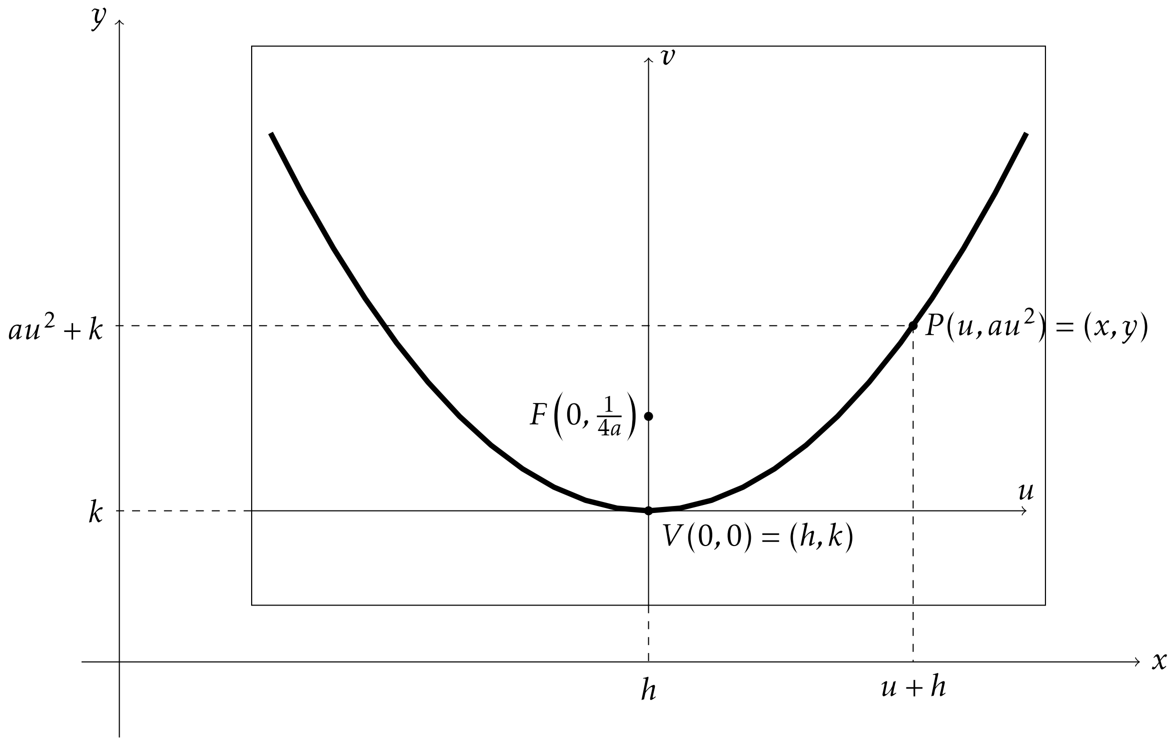

Figura 1.11: Parábola colocada em um sistema de eixos escolhido por outra pessoa

Segundo a figura, as coordenadas do ponto P no novo sistema de eixos, será tal que $x = u + a$ e $y = au^2 + k$. Basta agora, encontrarmos o valor de u na primeira igualdade e substituirmos na segunda afim de obtermos

$$y = a(x-h)^2 + k$$

que é a forma canônica da parábola. Essa equação pode ser desenvolvida expandindo o quadrado da diferença. Dessa expansão, obtemos

$$y = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$$

e fazendo $b = -2ah$ e $c = ah^2 + k$ podemos escrever a equação da parábola na forma cartesiana $y = ax^2 + bx + c$.

1.6 Propriedades estudadas na função quadrática

As interpretações dos coeficientes a, b e c são comumente feitas no estudo da função quadrática:

I - a é um fator de escala e escolher um valor negativo apenas inverterá a posição relativa do foco e da diretriz em relação à reta paralela à diretriz que passa pelo vértice.

II - b é a inclinação da reta tangente à parábola no ponto em que $x = 0$. De fato, a equação dessa reta é $y = bx + c$ e, supondo $a > 0$, $ax^2 + bx + c \geq bx + c$ para todo x.

III - c é o valor que y assume para $x = 0$.

IV - A parábola é simétrica em relação ao eixo $x = h$. Tomando a forma canônica, $y = a(x-h)^2 + k$ é bastante fácil verificar que o valor que y assume é o mesmo para $x = h + r$ e para $x = h - r$

V - A parábola nem sempre corta o eixo x, isto é, nem sempre é possível encontrar um valor de x que torna $y = 0$:

$$a(x-h)^2 + k = 0$$
$$(x-h)^2 = -\frac{k}{a}$$

Essa equação só terá solução no caso de $-\frac{k}{a} \geq 0$. No entanto essa relação é mais frequentemente escrita em termos dos coeficientes a, b e c. Fazendo as substituições, $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$. devemos ter $-\frac{k}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$. Como o denominador já é um quadrado , portanto não é negativo, tudo depende do numerador $b^2 - 4ac$, comumente chamado de Δ:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \text{ a equação tem apenas uma raiz} \\ \Delta > 0 \text{a equação admite duas raizes} \\ \Delta < 0 \text{ a equação não admite raízes} \end{cases}$$

VI - Quando a equação admite raízes, digamos α e β, há uma terceira forma da parábola que é chamada forma fatorada expressa por $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Essa forma facilita o estudo do sinal de y, pois para $\alpha < x < \beta$ os fatores $x - \alpha$ e $x - \beta$ têm sinais opostos e, portanto, o sinal de y será contrário ao de a e para todos os demais valores de x, y tem sempre o mesmo sinal de a.

VII - Pode-se expandir a forma fatorada efetuando a multiplicação dos binômios chegando a $y = ax^2 - (\alpha + \beta)ax + \alpha\beta a$. Nesse caso, tira-se as relações $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ e $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

VIII - No caso de $a > 0$, y assume um valor mínimo e, no caso de $a < 0$, y assume um valor máximo. Essas afirmações são facilmente demonstráveis a partir do fato de que o quadrado de um número real é, no mínimo, zero. Vamos fazer a demonstração para o caso de $a < 0$ e a demonstração para $a > 0$ é análoga: Seja, então $y = a(x-h)^2 + k$

$$\begin{aligned} (x-h)^2 &\geq 0, \forall x \\ a(x-h)^2 &\leq 0 \\ a(x-h)^2 + k &\leq k \\ y &\leq k \end{aligned}$$

Portanto k é o maior valor possível para y e acontece quando $x = h$.

1.7 Equação da reta tangente a uma parábola em um ponto

Dada uma parábola $y = ax^2 + bx + c$, vimos que a equação da reta tangente a essa parábola no ponto em que $x = 0$ é a reta $y = bx + c$. Lembrando que uma reta é tangente à parábola se contem um ponto da parábola e deixa toda a curva no mesmo semiplano do foco.

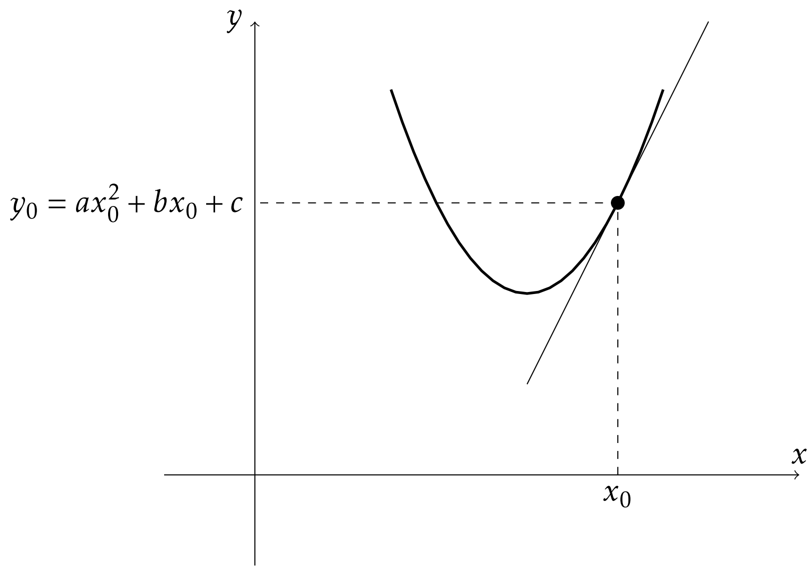

Figura 1.12: Reta tangenten à parábola no ponto (x_0, y_0)

Para encontrarmos a reta, já que conhecemos um de seus pontos, basta encontrar a sua inclinação m. Nesse caso, a reta será dada por $t : y - y_0 = m(x - x_0)$. Essa reta deve deixar a parábola toda em um mesmo semiplano. Na figura, $a > 0$ e, portanto, devemos ter para todos os valores de x:

$$ax^2 + bx + \cancel{c} \geq m(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + \cancel{c}$$
$$ax^2 + (b-m)x + (mx_0 + bx_0 - ax_0^2) \geq 0$$

Se a expressão $Y = ax^2 + (b-m)x + (mx_0 + bx_0 - ax_0^2)$ tivesse duas raízes, como vimos, para os valores de x entre essas raízes, Y assumiria valores negativos (sinal contrário ao da a), o que não é permitido. Portanto, devemos necessariamente ter $\Delta \leq 0$.

$$\begin{aligned}
\Delta = (b-m)^2 - 4a(mx_0 - bx_0 + ax_0^2) &\leq 0 \\
(b-m)^2 - 4ax_0(m - b + ax_0) &\leq 0 \\
(b-m)^2 + 4ax_0(b-m) + 4a^2x_0^2 &\leq 0 \\
\Delta = (b - m + 2ax_0)^2 &\leq 0
\end{aligned}$$

Como Δ é um quadrado, a única possibilidade é $\Delta = 0$, ou seja, $m = 2ax_0 + b$. Portanto, a reta tangente à parábola no ponto (x_0, y_0) é $t : y = y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)$