Geometria Analítica com vetores – II

E. Wagner – IMPA/FGV

Introdução

Em oportunidades anteriores do Papmem, tivemos oportunidade de abordar os conceitos e propriedades iniciais sobre os vetores tais como a igualdade, as operações de adição, subtração e multiplicação por número real, o módulo de um vetor do plano cartesiano, a condição de perpendicularismo, todos os detalhes da construção da equação da reta e suas diversas formas de apresentação.
A Geometria Plana, na parte métrica trata de três elementos fundamentais: as distâncias, os ângulos e as áreas. Neste capítulo vamos abordar a questão dos ângulos no plano cartesiano e descobrir como se calcula a área de um triângulo.

4. Ângulos

4.1. O produto escalar

A operação de multiplicação de um vetor por outro é, de certa forma, estranha. O produto escalar de um vetor por outro não dá como resultado um novo vetor, mas sim um número real e essa é a razão dessa operação ser chamada de produto *escalar*. A definição é a seguinte:

Dados os vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ o produto escalar de u por v é defindo por:

$$u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

A definição é clara. Se, por exemplo, $u = (2, 5)$ e $v = (-4, 3)$ então o produdo escalar desses vetores é $u \cdot v = 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 3 = 7$.
Mas, para que serve esse número? Vamos ver mais adiante. Inicialmente, mostraremos suas propriedades, que são de verificação imediata:

a) $u \cdot v = v \cdot u$
b) $u \cdot (v + v') = u \cdot v + u \cdot v'$ e $(u + u') \cdot v = u \cdot v + u' \cdot v$
c) $(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v), \alpha \in \mathbb{R}$
d) $u \cdot u = |u|^2$

No item 2.2 do texto anterior demonstramos a condição de perpendicularismo. Recordando, ela diz que, se nenhum dos vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ é nulo então, esses vetores são perpendiculares se, e somente se, $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Portanto, podemos agora escrever essa condição assim:

$$u, v \neq O,\ \ u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

Atenção

O vetor nulo $O = (0, 0)$ não deve ser confundido com o número real 0 (zero).

Exemplo

Dados os pontos $A = (2, 1)$, $B = (4, 5)$ e $C = (1, 5)$, determine o ponto P, do eixo X, de forma que as retas AB e CP sejam perpendiculares.

Solução

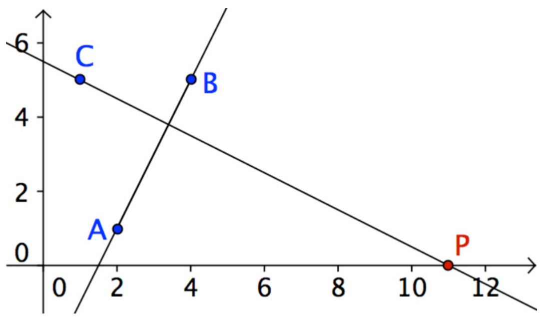
Consideremos então o ponto do eixo X, $P = (x, 0)$.

Temos que $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$ e $\overrightarrow{CP} = (x - 1, -5)$ são perpendiculares. Logo o produto escalar deles é zero:

$$(2, 4) \cdot (x - 1, -5) = 0$$
$$2(x - 1) + 4(-5) = 0$$

As contas simples fornecem $x = 11$ e, assim, a resposta é $P = (11, 0)$.

A figura a seguir mostra o que foi calculado. Observe que essa figura é apenas uma ilustração e não é absolutamente necessária para a resolução do problema.



Exemplo

Por que as diagonais de um losango são perpendiculares?

Solução

Seja $ABCD$ um losango. Tomemos $\overrightarrow{AB} = u$ e $\overrightarrow{AD} = v$. Sobre as diagonais do losango temos $\overrightarrow{AC} = u + v$ e $\overrightarrow{DB} = u - v$. Utilizando o fato de que $|u| = |v|$ vamos calcular o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DB}$:

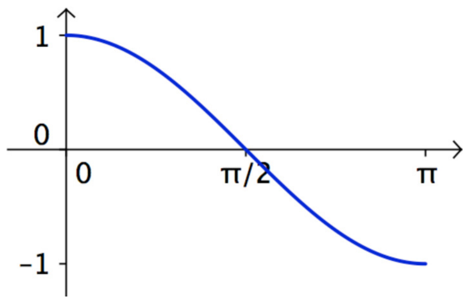
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (u + v) \cdot (u - v) = u \cdot u - v \cdot v = |u|^2 - |v|^2 = 0$$

Portanto, as diagonais do losango são perpendiculares.

Obs: Observe que, neste exemplo, não houve necessidade de estabelecermos um sistema de coordenadas. A propriedade do losango pode ser demonstrada com a utilização, apenas, das propriedades do produto escalar.

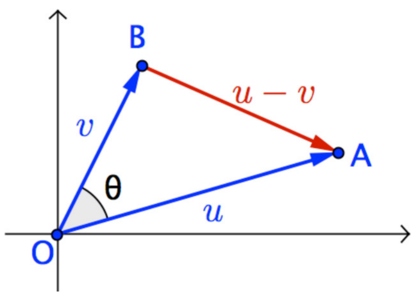
4.2. Ângulo entre dois vetores

Na geometria com coordenadas cada ângulo é identificado por uma de suas razões trigonométricas. Na geometria analítica tradicional cada ângulo é identificado por sua tangente. Aqui, vamos identificar cada ângulo por seu cosseno. De fato para cada ângulo do intervalo $[0, \pi]$ existe uma bijeção entre o ângulo e seu cosseno.



Portanto, nesse contexto, conhecer o cosseno de um ângulo significa conhecer o ângulo.

A figura a seguir mostra o triângulo OAB onde $\overrightarrow{OA} = u$ e $\overrightarrow{OB} = v$.



A lei dos cossenos nesse triângulo fornece:

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$

Entretanto, o lado esquerdo da igualdade acima pode ser escrito, usando as propriedades do produto escalar, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |u - v|^2 &= (u - v) \cdot (u - v) = \\ &= (u - v) \cdot u - (u - v) \cdot v = \\ &= u \cdot u - v \cdot u - u \cdot v + v \cdot v = \\ &= u\ \cdot u - u \cdot v - u \cdot v + v \cdot v = \\ &= |u|^2 - 2u \cdot v + |v|^2 \end{aligned}$$

A relação inicial da lei dos cossenos fica então:

$$|u|^2 - 2u \cdot v + |v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$$

ou seja,

$$u \cdot v = |u||v|\cos\theta$$

Se u e v são colineares e de mesmo sentido, então $\cos\theta = 1$ e se são colineares e de sentidos opostos, então $\cos\theta = -1$. Portanto, concluimos que:

$$-|u||v| \leq u \cdot v \leq |u||v|$$

Por outro lado, como sabemos calcular o produto escalar de dois vetores e como também sabemos calcular seus módulos, então podemos calcular o ângulo entre eles:

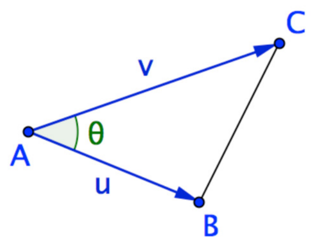
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

Exemplo

O triângulo ABC tem vértices $A = (1,1)$, $B = (4,-1)$ e $C = (6,4)$. Determine um valor aproximado em graus para o ângulo BAC.

Solução

O desenho deve ser apenas um esboço. Na geometria com coordenadas não há a menor necessidade de executar desenhos precisos a partir dos eixos. Basta algo assim:

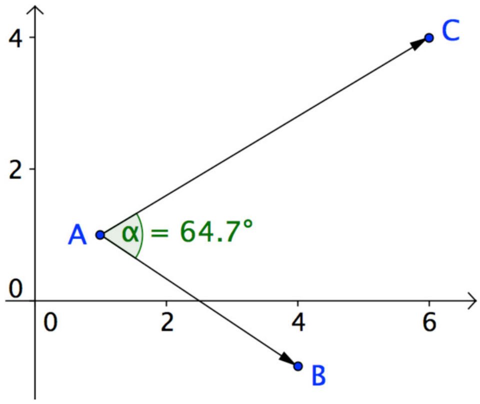


Como o ângulo que queremos determinar tem vértice A, determinamos os vetores:
$u = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,-2)$ e $v = \overrightarrow{AC} = C - A = (5,3)$. A seguir calculamos:
$u \cdot v = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 3 = 9$
$|u| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
$|v| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

Assim, o ângulo θ entre os vetores u e v é dado por

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}} = \frac{9}{\sqrt{442}}$$

Essa é a resposta correta, mas esse valor nada diz de concreto a respeito desse ângulo. Nesse ponto, usamos a calculadora científica, ou melhor, a do celular e encontramos para esse ângulo o valor aproximado de 64,7°. A situação real está a seguir.

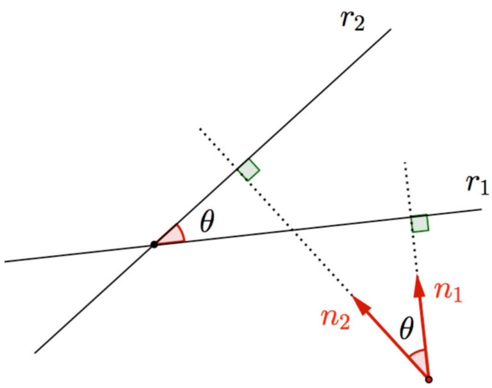


4.3. Ângulo entre duas retas

Na geometria analítica tradicional o ângulo entre duas retas é caracterizado pela sua tangente, calculada a partir de uma (hoje obscura) fórmula de trigonometria, que utiliza os coeficientes angulares das duas retas. Vamos continuar a determinar o ângulo através do seu cosseno.

Quando duas retas são concorrentes, costumamos definir o ângulo entre essas retas como sendo o menor ângulo formado por elas. Assim, o *ângulo entre duas retas* é sempre agudo ou reto. Assim, se duas retas não são perpendiculares, o cosseno do ângulo entre elas é um número positivo.

Observe, na figura a seguir que o ângulo entre as retas r_1 e r_2 é o menor ângulo formado pelos respectivos vetores normais n_1 e n_2.



Dessa forma o ângulo entre duas retas, a partir dos seus vetores normais, é dado por:

$$\cos\theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$$

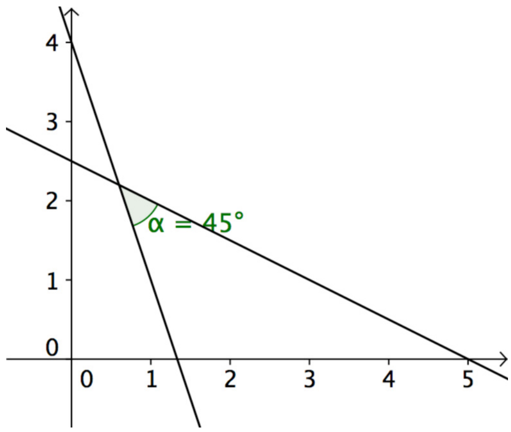
Exemplo

Qual é o ângulo formado pelas retas $3x + y = 4$ e $x + 2y = 5$?

Solução
Os vetores normais das retas dadas são $n_1 = (3, 1)$ e $n_2 = (1, 2)$. Vamos calcular o cosseno do ângulo entre eles.
$n_1 \cdot n_2 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$
$|n_1| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
$|n_2| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
Então,

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\alpha = 45°$. Apenas por curiosidade, o desenho dessas retas no plano cartesiano está a seguir:

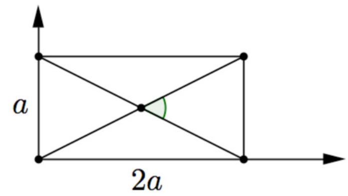


Frequentemente precisamos calcular um ângulo entre duas retas, mas se planejarmos bem, podemos calcular apenas o ângulo entre dois vetores, sem necessidade de obtermos equações para as retas. Para ser mais claro, vamos resolver o problema seguinte:

Problema
Um retângulo tem sua base igual ao dobro de sua altura. Qual é o ângulo entre suas diagonais?

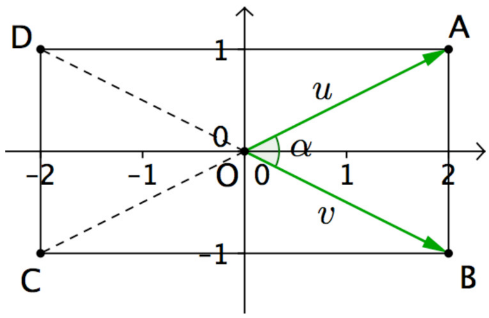
Perceba, inicialmente, que esse é um problema de geometria e pode ser resolvido por diversos caminhos. Um dos caminhos, na geometria sintética é a lei dos cossenos, outro, a trigonometria, mas aqui vamos usar a geometria com coordenadas que estamos estudando.
Quando se faz a opção de usar coordenadas é preciso enfatizar que temos dois direitos que devemos usar com sabedoria. Como são direitos, vamos chamá-los de D1 e D2.
D1. A posição dos eixos de coordenadas é opção livre de cada um.
D2. A unidade de medida deve ser escolhida por cada um.

No caso do problema proposto uma opção comum é escolher um dos vértices do retângulo como origem do sistema de coordenadas e colocar os eixos passando por dois lados do retângulo, como mostra a figura a seguir:



Quem adotou a figura acima compreendeu D1, mas ignorou D2.
É muito comum que usuários de matemática, sejam alunos ou professores, coloquem nas figuras que estão construindo uma letra, digamos, a para representar o comprimento de certo segmento. A justificativa que dão é que assim, fica mais geral. De fato fica mesmo, mas vamos pensar um pouco mais. O que significa o símbolo "a" para a medida de um segmento? A rigor, a resposta é: nada. O símbolo "a" só representa algum número para a medida de um segmento, se uma unidade já foi estabelecida antes.
Quero deixar claro que quem adota a figura acima para a solução do problema proposto não está incidindo em nenhum erro. Apenas, não está exercendo todos os seus direitos.
Vamos, a seguir, mostrar uma solução do problema proposto incluindo os direitos D1 e D2.

Solução
Em um sistema de coordenadas consideremos os pontos:
$A = (2, 1)$, $B = (2, -1)$, $C = (-2, -1)$ e $D = (-2, 1)$.
O retângulo $ABCD$ tem sua base (CB) igual ao dobro de sua altura (BA).



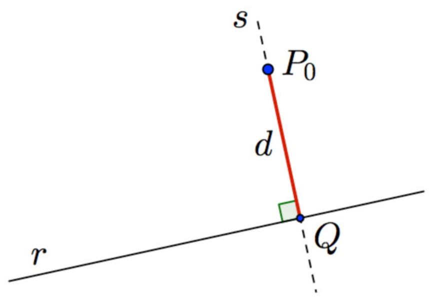
O retângulo ABCD de centro O representado na figura acima cumpre a condição do enunciado: sua base é o dobro de sua altura. Assim, o ângulo entre as diagonais é o ângulo entre os vetores $u = \overrightarrow{OA} = (2, 1)$ e $v = \overrightarrow{OB} = (2, -1)$. Então,

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Com a calculadora vemos que esse ângulo é de, aproximadamente, 53,1°.

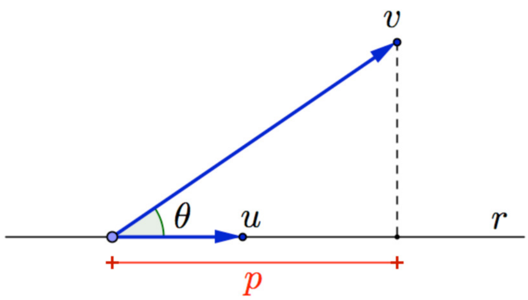
5. Distância de um ponto a uma reta

Na geometria analítica tradicional dos livros didáticos brasileiros a distância de um ponto a uma reta, quando aparece, é dada por uma misteriosa fórmula. A demonstração não aparece nesses livros, em geral, pois demanda um grande trabalho de cálculos, mas a ideia é fácil de entender. Dados um ponto P_0 e uma reta r, construímos uma reta s, que contém P_0 e é perpendicular a r. Determinamos, em seguida o ponto Q, interseção das retas r e s. A distância entre P_0 e Q é a distância de P_0 à reta r.



Vamos ver, a seguir, que com vetores o trabalho se reduz a quase nada. Antes porém, vamos tratar de calcular o comprimento da projeção de um vetor sobre uma reta.

5.1. Projeção de um vetor dado sobre uma reta dada



Na figura a seguir, v é um vetor dado, r é uma reta dada, u é um vetor unitário que tem a direção de r, p é o comprimento da projeção de v sobre r, e θ é o ângulo entre os vetores u e v.

Temos que $u \cdot v = |u||v| \cos\theta$ e, portanto, $|u \cdot v| = |u||v|\,|\cos\theta|$, mas como u é unitário, então $|u \cdot v| = |v|\,|\cos\theta\,| = p$. Assim, o comprimento da projeção de um vetor v sobre a reta que contém o vetor unitário u é $p = |u \cdot v|$.

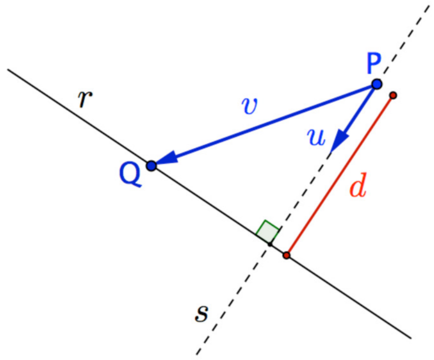
Com o que foi dito acima vamos, em um exemplo, calcular a distância de um ponto dado à uma reta dada.

Exemplo

Calcule a distância do ponto $P = (6, 4)$ à reta $r: 2x + 3y - 5 = 0$.

Solução

A figura a seguir mostra, em desenho livre, a reta r e o ponto P. Consideremos a reta reta r , passando por P e perpendicular a r com seu vetor diretor unitário u.



Seja Q um ponto qualquer da reta r. A distância d, do ponto P à reta r, é exatamente o comprimento da projeção do vetor $\overrightarrow{PQ}$ sobre a reta s. E isso é o que aprendemos no item anterior.

A reta r dada, de equação $2x + 3y - 5 = 0$ tem como vetor normal $n = (2, 3)$. Como o módulo desse vetor é $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, O vetor unitário de mesma direção e sentido que n é

$$u = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3)$$

Por outro lado, devemos escolher um ponto qualquer da reta r e escolhemos $Q = (1, 1)$. Assim, o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é $v = Q - P = (-5, -3)$.

Assim, distância d, do ponto P à reta r é, portanto,

$$d = |u \cdot v| = \left|\frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3) \cdot (-5, -3)\right| = \frac{1}{\sqrt{13}}|-10 - 9| = \frac{19}{\sqrt{13}}$$

O leitor poderá obter, seguindo os mesmos passos, uma fórmula para a distância do ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ à reta de equação $ax + by + c = 0$.